

D.S. n°4

Exercice 1 : La vie d'une bulle (/ 6pts.)

On se propose dans cet exercice de faire une plongée au cœur de l'effervescence d'une boisson gazeuse, d'illustrer et d'interpréter sous l'angle de la physico-chimie les différentes étapes de la vie éphémère d'une bulle, à savoir : sa naissance, son ascension dans le liquide, et son éclatement en surface.

Dans tout l'exercice les bulles seront assimilées à des sphères, et la boisson à un liquide de masse volumique égale à celle de l'eau. Le référentiel d'étude est terrestre considéré comme galiléen.

Données:

Masses volumiques : eau $\rho_e = 1,0 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$; dioxyde de carbone $\rho_{dc} = 1,8 \text{ kg.m}^{-3}$

Intensité de la pesanteur: $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

1. Naissance et décollement d'une bulle

Dans une bouteille fermée de boisson gazeuse, un équilibre s'établit entre le dioxyde de carbone qui est dissous dans la boisson et le dioxyde de carbone gazeux piégé dans le col de la bouteille. Lors de l'ouverture de celle-ci, l'équilibre est rompu et la boisson se débarrasse d'une partie du dioxyde de carbone dissous qui retourne progressivement en phase gazeuse. Il y a formation de bulles qui vont s'enrichir continûment en gaz au cours de leur remontée.

Dans un verre, les bulles naissent sur des sites de nucléation qui sont des embryons de bulles présents en solution ou de petites poches d'air piégées par des impuretés microscopiques (fibres de cellulose, microcristaux ...). La figure 1 illustre cette formation de bulles sur un site de nucléation.

Dès que la valeur de la poussée d'Archimède \vec{F}_A à laquelle la bulle est soumise dépasse la valeur de la force capillaire qui l'ancre à son site de nucléation, la bulle se détache. Puis une autre bulle naît et subit le même sort.

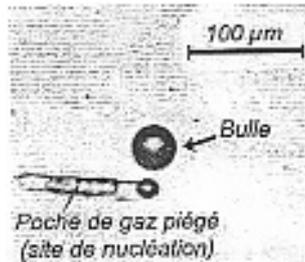


Figure 1

Pour une bulle qui vient de se détacher du site de nucléation dans un liquide de masse volumique ρ_e :

1.1. Donner la direction et le sens de la poussée d'Archimède \vec{F}_A qui s'exerce sur une bulle de volume V_0 dans la boisson.

1.2. Donner l'expression littérale de sa valeur en fonction du volume V_0 de la bulle.

2. Ascension d'une bulle : à la recherche d'une modélisation satisfaisante

À l'instant de date $t_0 = 0 \text{ s}$, une bulle de rayon $r_0 = 20 \text{ }\mu\text{m}$, située au point A à la profondeur $z_0 = 0 \text{ m}$ dans le repère $(O ; \vec{K})$ (figure 2) se détache de son site de nucléation avec une vitesse initiale v_0 nulle dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Elle remonte verticalement vers la surface S du liquide, qu'elle atteint avec une vitesse v_S d'environ 15 cm.s^{-1} .

Dans un premier temps (pour les questions 2.1. et 2.2.), on assimile la bulle de gaz à une sphère dont le volume ne varie pas lors de sa remontée.

2.1. Étude du mouvement d'une bulle en l'absence de force de frottement

2.1.1. Montrer que le poids \vec{P}_0 de la bulle a une valeur négligeable devant celle de la

poussée d'Archimède \vec{F}_A en calculant le rapport: $\frac{P_0}{F_A}$.

2.1.2. En utilisant la deuxième loi de Newton, établir l'expression de la coordonnée a_z du vecteur accélération de la bulle en fonction des masses volumiques ρ_e et ρ_{dc} et de g .

2.1.3. En déduire l'expression de la valeur de la vitesse de la bulle en fonction du temps.

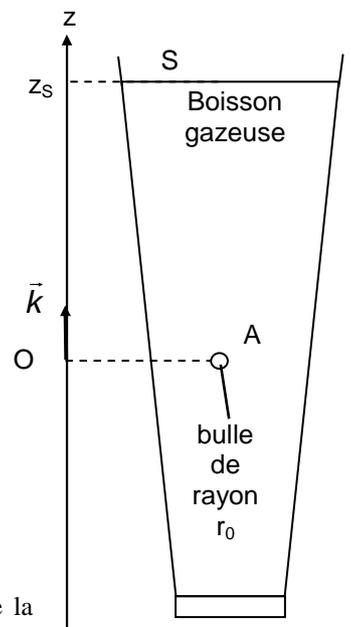


Figure 2

2.1.4. Montrer que la durée t_s , théoriquement nécessaire pour que la bulle atteigne la surface avec la vitesse v_s , est alors d'environ trente microsecondes.

2.1.5. Cette valeur correspond-elle aux observations de la vie quotidienne ? Conclure quant à la validité du modèle proposé.

2.2. Étude du mouvement de la bulle en présence d'une force de frottement

Le liquide exerce sur la bulle une force de frottement, proportionnelle à sa vitesse, qui peut s'écrire vectoriellement $\vec{f} = -k \cdot \vec{v}$, k est un coefficient qui dépend du rayon de la bulle et de la viscosité du fluide dans lequel elle se déplace.

2.2.1. Représenter schématiquement, sans souci d'échelle, les forces non négligeables qui s'exercent sur la bulle en mouvement après son décollement du site de nucléation.

2.2.2. En appliquant la deuxième loi de Newton, montrer que l'équation différentielle qui régit l'évolution de la vitesse de la bulle s'écrit alors:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{kv}{\rho_{dc} V_0} = \frac{\rho_e}{\rho_{dc}} g$$

2.2.3. En déduire l'expression littérale de la vitesse limite v_{lim} atteinte par la bulle.

2.2.4. L'application numérique donne v_{lim} voisin de $1 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$. Compte tenu de cette valeur. Conclure quant à la validité du modèle proposé.

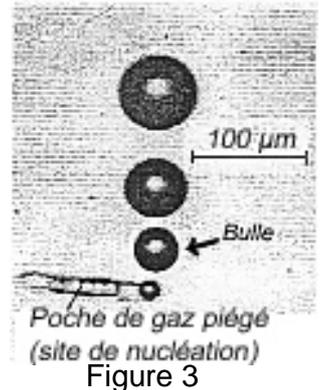
2.3. Un autre paramètre à prendre en compte

Les modélisations précédentes ne décrivent pas de manière satisfaisante le mouvement de la bulle dans la boisson gazeuse. En particulier, les expériences réalisées dans du champagne montrent que la variation du volume de la bulle ne peut pas être négligée (figure 3).

On se propose d'en trouver l'origine.

On suppose que la quantité de matière n_0 de gaz présent dans la bulle et la température restent constantes. Dans ce cas, lors d'une remontée de 12 cm du point A à la surface S, la diminution de pression du gaz ne ferait augmenter son volume initial que de 2%.

Dans la réalité, l'augmentation du volume est un million de fois supérieure ! Un des deux paramètres supposés constants dans le texte précédent ne l'est donc pas.



2.3.1. En s'aidant d'une phrase du texte introductif à la partie 1 de cet exercice, expliquer pourquoi le volume de la bulle augmente si fortement lors de sa remontée.

2.3.2. Durant l'ascension le poids de la bulle est toujours négligeable devant la poussée d'Archimède.

Sachant que le coefficient k défini à la question 2.2. augmente avec le rayon de la bulle, préciser qualitativement l'influence de la variation du volume de la bulle sur chacune des forces qui s'exercent sur elle au cours de la remontée.

Des laboratoires spécialisés ont élaboré des modèles plus satisfaisants tenant compte de paramètres négligés précédemment.

3.L'éclatement des bulles en surface

La bulle a maintenant gagné la surface et le film liquide qui constitue la partie émergée de la bulle s'amincit (figure 4.a) jusqu'à se rompre lorsque son épaisseur avoisine le micromètre. Le trou qui apparaît s'ouvre (figure 4.b) et la durée de disparition de la calotte sphérique n'est que de quelques dizaines de microsecondes ! Le cratère qui reste à la surface du liquide ne va pas durer (figure 4.c).

De violents courants apparaissent et, en se refermant, cette cavité projette vers le haut un mince jet de liquide (figure 4.d). Le jet se brise ensuite en fines gouttelettes (figure 4.e) qui en retombant dans le liquide engendrent des ondes circulaires centrées sur la "bulle-mère" (figure 4.f).

Ces observations nécessitent l'utilisation d'une caméra ultra-rapide capable de filmer jusqu'à 2000 images par seconde avec une résolution proche du micromètre (figure 5).

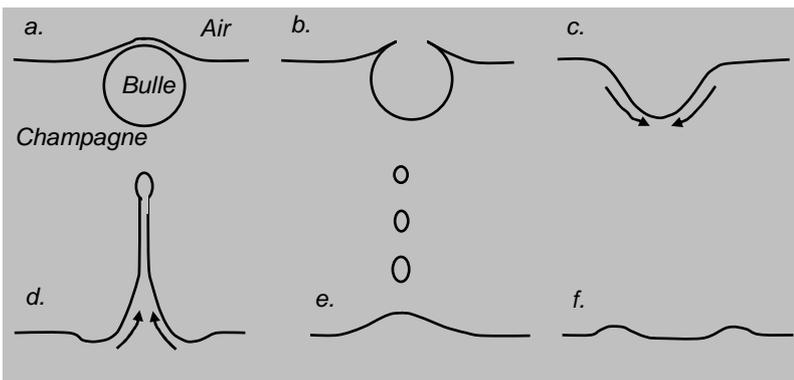


Figure 4

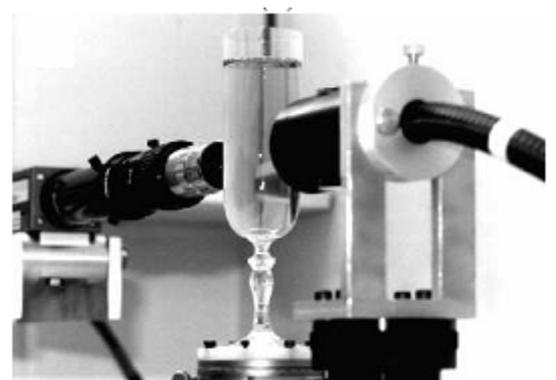


Figure 5

- 3.1. Malgré l'emploi de la caméra ultra-rapide, pourquoi ne peut-on pas obtenir d'images du film liquide en train de se rompre ?
3.2. L'onde circulaire créée est-elle longitudinale ou transversale ? Justifier.

Bien qu'éphémère, la vie d'une bulle n'en est pas moins riche en événements !

Exercice 2 : Le grand saut (/ 6pts.)

Michel Fournier, parachutiste français de 58 ans, a le projet de franchir le mur du son en chute « libre ». Il veut réaliser cet exploit en sautant d'un ballon à une altitude de 40 000 mètres au dessus du Canada.

Le document donné en annexe 2 est extrait d'un site Internet. Il indique :

- les différentes phases du saut (le film du saut) ;
- les deux records du monde à battre (d'Andrejev et de Kitingier) ;
- les principales caractéristiques de l'air à différentes altitudes (masse volumique, température et pression).

Dans cet exercice, on se propose de retrouver quelques précisions quantitatives données dans le film du saut.

Les trois parties sont indépendantes.

PARTIE A : la montée en ballon

Le ballon qui doit permettre la montée dans la haute atmosphère est constitué d'une enveloppe à laquelle est attachée une nacelle pressurisée emportant le sauteur avec son équipement. Ce ballon est gonflé avec de l'hélium.

Données :

Masse totale de l'ensemble {ballon + nacelle + sauteur} : $m = 1,6 \times 10^3$ kg

Volume total du ballon : $V_b = 4,0 \times 10^3$ m³

Au sol : intensité de la pesanteur $g = 9,8$ N.kg⁻¹

masse volumique de l'air : $\mu = 1234$ g.m⁻³

Comparer le poids de l'ensemble {ballon + nacelle + sauteur} au niveau du sol à la poussée d'Archimède qui s'exerce sur le ballon. Conclure.

PARTIE B : Chute libre dans la haute atmosphère (stratosphère)

1. En utilisant le document en annexe 2, indiquer brièvement et sans faire de calcul la raison pour laquelle on peut faire l'hypothèse d'une chute libre pour cette première partie du saut.
2. Dans cette première phase, on suppose la vitesse initiale nulle au moment du largage à l'altitude de 40 km. On considèrera que l'accélération de la pesanteur vaut alors $g = 9,7$ m.s⁻².
3. Faire l'étude complète du mouvement et en déduire les équations horaires de la vitesse et de la position.
4. Lorsque la vitesse du son est atteinte (1067 km.h⁻¹) :
 - a) Calculer la durée de chute depuis le largage.
 - b) Calculer la hauteur de chute et l'altitude atteinte.
 - c) Comparer ces résultats avec les données du document. Conclure.

PARTIE C : Chute dans la basse atmosphère (troposphère)

A partir de l'altitude de 10 km, le sauteur avec son équipement de masse 200 kg, pénètre dans les couches denses de l'atmosphère avec une vitesse initiale de 309 km.h⁻¹. Dans cette zone, la valeur de l'accélération de la pesanteur est $g = 9,8$ m.s⁻².

1. On admet que l'ensemble des forces exercées par l'air sur le sauteur peut se modéliser par une force de frottement dont la valeur f est reliée à la vitesse v par la relation :

$$f = k \cdot v^2 \quad \text{avec } k = 0,78 \text{ unités SI.}$$

A partir d'une analyse dimensionnelle, déterminer l'unité de la constante k dans le Système International.

2. Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $v(t)$, au cours de la chute. On utilisera un axe vertical dirigé vers le bas.

3. Pour déterminer l'évolution de la vitesse on utilise la méthode itérative d'Euler avec un pas de résolution $\Delta t = 0,5$ s. On obtient le tracé de la figure 1.

a) Soient v_n la vitesse à l'instant t_n et v_{n+1} la vitesse à l'instant $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. Montrer qu'en utilisant l'équation différentielle précédente ainsi qu'une seconde relation, on obtient la formule de récurrence suivante :

$$v_{n+1} = v_n + A - B \cdot v_n^2$$

où $A = 4,9$ SI et $B = 1,95 \cdot 10^{-3}$ SI.

Retrouver les valeurs et préciser les unités des constantes A et B.

b) En utilisant le graphe représentant la vitesse v en fonction du temps t ; v étant calculée avec la relation précédente, déterminer :

- le temps caractéristique τ de la chute ;
- la valeur de la vitesse limite exprimée en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$. Comparer cette valeur à la prévision indiquée sur le film du saut.

c) Quelle est la condition sur Δt pour que la méthode d'Euler soit applicable ?

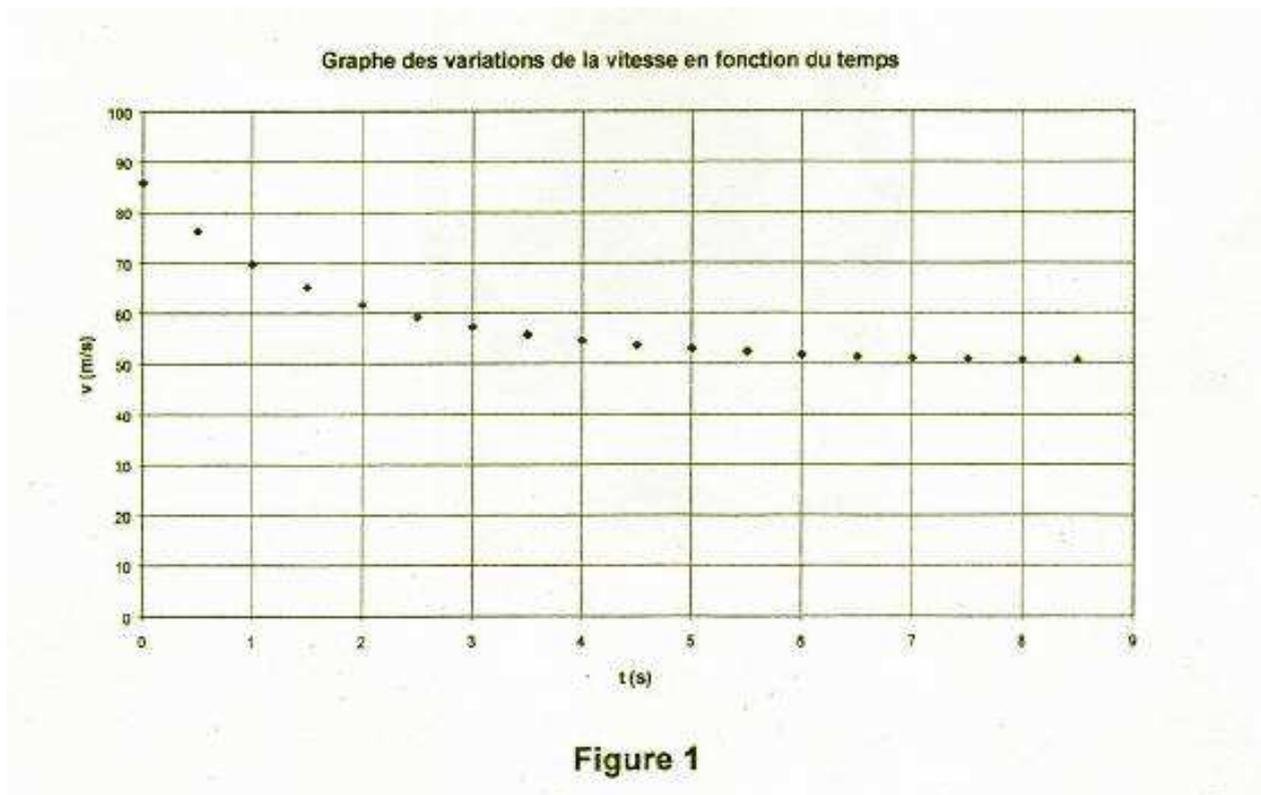


Figure 1

Exercice 3 : pKa d'un indicateur coloré (/ 8pts.)

Le bleu de bromophénol est un indicateur coloré dont la forme acide, notée HIn, est jaune et dont la forme basique, notée In^- , est bleue.

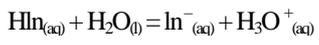
Préparation de la solution mère.

On prépare, dans une fiole jaugée, deux litres d'une solution mère S_0 de bleu de bromophénol de concentration molaire en soluté apporté $C_0 = 3,0 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

Première partie : Étude de la solution mère

On considère un volume $V = 100$ mL de solution S_0 dont le pH est de 4,7.

1. Calculer la quantité de matière de bleu de bromophénol n_0 initialement introduite dans 100 mL de solution S_0 .
2. L'espèce HIn est un acide.
 - 2.1. Donner la définition d'un acide selon Brønsted.
 - 2.2. Donner les couples acide-base intervenant dans cette équation, leur demi-équation et montrer que l'équation de la réaction de HIn sur l'eau est :



3. Étude de la réaction de HIn sur l'eau

- 3.1. Remplir le tableau d'avancement de la réaction, donné dans l'**annexe à rendre avec la copie**, en fonction de n_0 , x , x_{\max} , x_f .
 - 3.2. Calculer l'avancement maximal x_{\max} .
 - 3.3. Calculer l'avancement final de la réaction x_f .
 - 3.4. En déduire le taux d'avancement final. Cette réaction est-elle totale ?
4. Relation de conservation de la matière
- 4.1. En utilisant la ligne décrivant l'état intermédiaire du tableau d'avancement, justifier que pour toute valeur de l'avancement x on a $n_{\text{Hin}} + n_{\text{In}^-} = n_0$.
 - 4.2. En déduire la relation qui relie les concentrations molaires effectives des espèces présentes $[\text{HIn}]_f$ et $[\text{In}^-]_f$ en solution et la concentration C_0 .

Deuxième partie : Étude de deux solutions

On prépare deux solutions à partir de la solution mère S_0 .

➤ Préparation de la solution S_1 :

À un litre de la solution mère S_0 on ajoute $1,0 \cdot 10^{-2}$ mol d'ions oxonium H_3O^+ en utilisant de l'acide chlorhydrique concentré. L'addition d'acide chlorhydrique se fait sans variation appréciable du volume de la solution. La solution S_1 obtenue est jaune, de $\text{pH} = 2,0$ et de concentration en bleu de bromophénol apporté : $C_0 = 3,0 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$.

➤ Préparation de la solution S_2 :

À un litre de la solution mère S_0 , on ajoute $1,0 \cdot 10^{-2}$ mol d'ions hydroxyde OH^- par ajout d'une solution d'hydroxyde de sodium concentrée. L'addition de la solution d'hydroxyde de sodium se fait sans variation appréciable du volume de la solution. La solution S_2 obtenue est bleue, de $\text{pH} = 12,0$ et de concentration en bleu de bromophénol apporté $C_0 = 3,0 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$.

Pour les deux solutions S_1 et S_2 on admet la relation :

$$[\text{HIn}]_f + [\text{In}^-]_f = C_0$$

$[\text{HIn}]_f$ et $[\text{In}^-]_f$ désignant les concentrations effectives des formes acide et basique.

1. Quelle espèce chimique du couple de l'indicateur coloré prédomine dans la solution S_1 ? dans la solution S_2 ? Justifier.
2. De quels paramètres dépend la proportion d'acide et de base conjuguée dans chaque solution. Justifier.
3. Pour la solution S_2 , on émet l'hypothèse que la concentration effective de la forme acide HIn est négligeable. Quelle est alors la valeur de la concentration effective de la forme basique In^- ?

Troisième partie : Étude spectrophotométrique

Protocole suivi :

Dans un bécher contenant un volume quelconque de la solution S_1 , on ajoute de la solution S_2 de façon à obtenir successivement des solutions dont les pH sont donnés dans le tableau ci-dessous.

Lorsqu'une solution de pH donné est réalisée, on mesure par spectrophotométrie l'absorbance A du mélange.

À la longueur d'onde λ utilisée par le spectrophotomètre, seule la forme basique In^- absorbe.

On obtient les résultats suivants :

pH	2,0	2,5	3,0	3,5	3,9	4,1	4,5
A	0,02	0,06	0,21	0,54	0,85	1,02	1,22
pH	4,7	5,1	5,6	6,2	6,7	8,0	12
A	1,37	1,53	1,59	1,63	1,66	1,66	1,66

On admet que, pour toutes les solutions obtenues par mélange des solutions S_1 et S_2 en proportions quelconques :

- la concentration molaire en bleu de bromophénol apporté est $C_0 = 3,0 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$.

- $[\text{HIn}]_f + [\text{In}^-]_f = C_0$.

On rappelle que l'absorbance A d'une solution est liée à la concentration effective $[\text{X}]$ en espèce absorbante par : $A = k \cdot [\text{X}]$ où k est une constante.

1. Calcul des concentrations des espèces In^- et HIn .
 - 1.1. Montrer que, pour tout pH, l'absorbance A d'un mélange quelconque est donnée par :

$$A = k \cdot [\text{In}^-]_f$$
 - 1.2. Pour la solution S_2 de $\text{pH} = 12,0$ l'absorbance est maximale. Montrer que l'absorbance maximale A_{max} et la concentration molaire en bleu de bromophénol apporté C_0 vérifient la relation : $A_{\text{max}} = k \cdot C_0$. En déduire la valeur du coefficient k et préciser son unité.
 - 1.3. En déduire les expressions de $[\text{HIn}]_f$ et $[\text{In}^-]_f$ en fonction de A , A_{max} et C_0 .
 - 1.4. Calculer les concentrations effectives des espèces In^- et HIn présentes dans le mélange lorsque l'absorbance A de celui-ci est égale à 0,83.
2. L'exploitation des données expérimentales a permis de construire le graphique, proposé dans l'annexe 1 à rendre avec la copie, donnant les concentrations des espèces HIn et In^- en fonction du pH.
 - 2.1. Déterminer, à partir de ce graphique, les domaines de prédominance des formes acide et basique du bleu de bromophénol.
 - 2.2. Donner la relation entre pH , pKa , $[\text{HIn}]_f$ et $[\text{In}^-]_f$.
 - 2.3. En déduire qu'un point particulier de ce graphique permet de déterminer le pKa du couple étudié. Donner sa valeur.
 - 2.4. Vérifier **par un calcul** que l'hypothèse émise dans la question 3 de la deuxième partie est légitime.

ANNEXE 1 : (À rendre avec la copie)

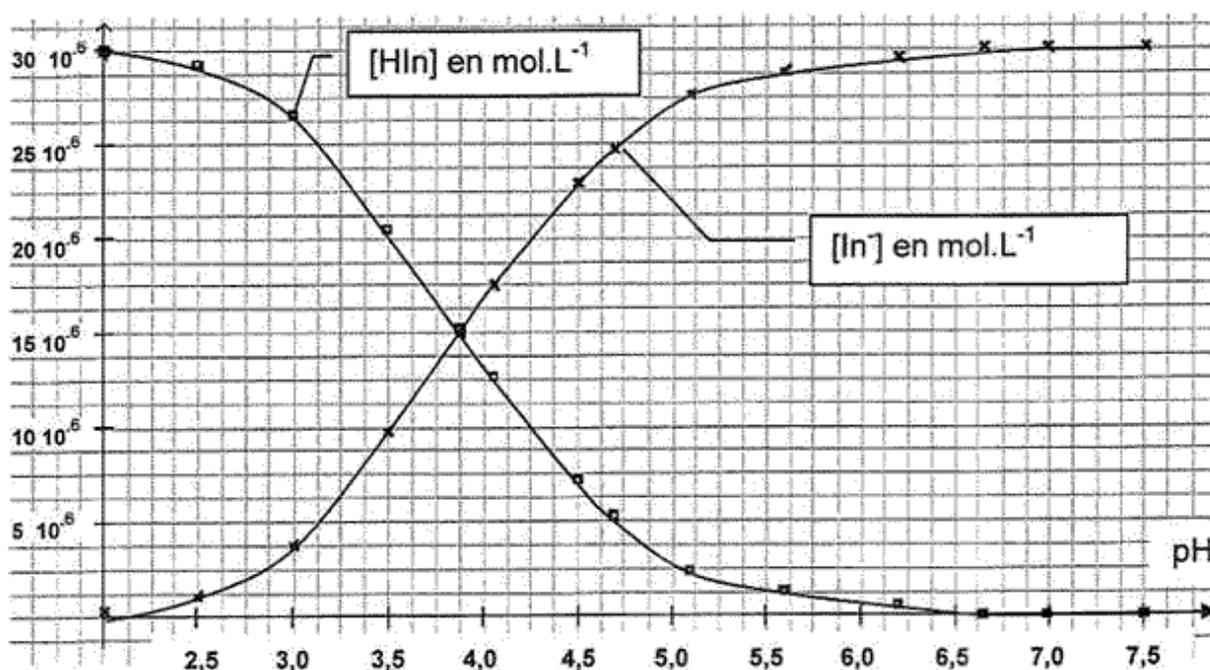
Première partie, question 3 : Tableau d'avancement

		$\text{HIn}_{(\text{aq})}$	+	$\text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}$	=	$\text{In}^-_{(\text{aq})}$	+	$\text{H}_3\text{O}^+_{(\text{aq})}$
Avancement		Quantités de matière						
État initial	$x = 0$			Excès				
État intermédiaire	x			Excès				
État final si réaction totale	$x = x_{\text{max}}$			Excès				
État final observé	$x = x_f$			Excès				

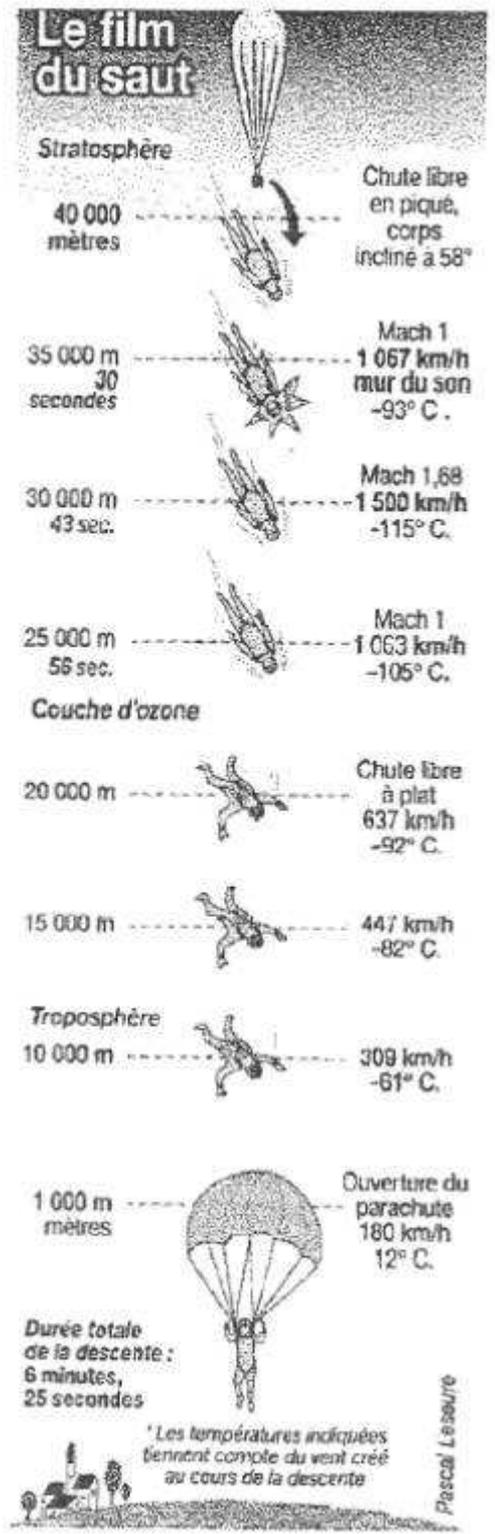
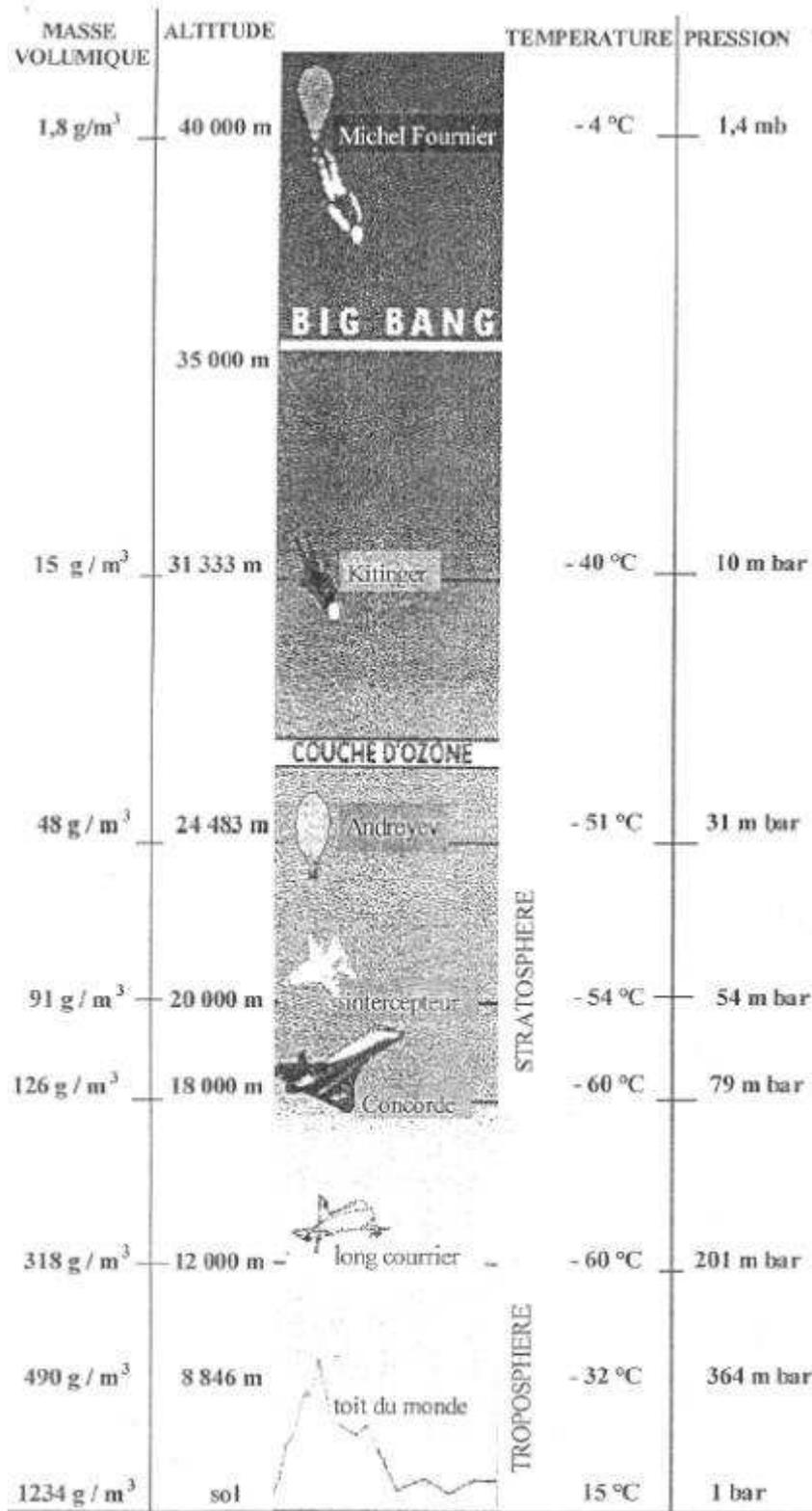
Troisième partie, question 2 :

Concentration des espèces présentes $[\text{HIn}]$ et $[\text{In}^-]$ en fonction du pH

Concentrations (mol.L^{-1})



ANNEXE 2 : DOCUMENT

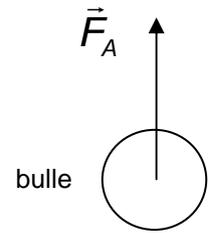


Correction D.S. n°4

Exercice 1 :

1. Naissance et décollement d'une bulle

1.1. (0,25) La poussée d'Archimède \vec{F}_A possède une direction **verticale**, son sens est **dirigé vers le haut**.



1.2. (0,25) La valeur de la poussée d'Archimède est égale **poinds du fluide déplacé (ici l'eau) par la bulle**.

Soit V_0 le volume de la bulle et ρ_e la masse volumique de l'eau alors :

$$F_A = \rho_e \cdot V_0 \cdot g$$

2. Ascension d'une bulle: à la recherche d'une modélisation satisfaisante

2.1. Étude du mouvement d'une bulle en l'absence de force de frottement

2.1.1. (0,25) Soit \vec{P}_0 le poids de la bulle de dioxyde de carbone.

$$P_0 = m \cdot g$$

$$\frac{P_0}{F_A} = \frac{\rho_{dc} \cdot V_0 \cdot g}{\rho_e \cdot V_0 \cdot g} = \frac{\rho_{dc}}{\rho_e}$$

$$\frac{P_0}{F_A} = \frac{1,8}{1,0 \times 10^3} = 1,8 \times 10^{-3} \ll 1$$

Le poids de la bulle est donc négligeable devant la poussée d'Archimède.

2.1.2. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, la bulle est soumise à son poids et à la poussée d'Archimède.

En négligeant le poids devant la poussée d'Archimède, la deuxième loi de Newton s'écrit :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{F}_A = m \cdot \vec{a}$$

En projection selon l'axe (Oz) vertical orienté vers le haut (figure 2), il vient :

$$F_{Az} = m \cdot a_z$$

$$\rho_e \cdot V_0 \cdot g = \rho_{dc} \cdot V_0 \cdot a_z$$

(0,25) Finalement:

$$a_z = \frac{\rho_e}{\rho_{dc}} \cdot g$$

2.1.3. On a : (0,25) $a_z = \frac{dv_z}{dt}$ donc par intégration il vient : $v_z(t) = \frac{\rho_e}{\rho_{dc}} \cdot g \cdot t + Cte$

Or à $t = 0$ la bulle se détache du site de nucléation avec une vitesse nulle donc : $v_z(0) = 0$ soit $Cte = 0$

$$\text{alors } v_z(t) = \frac{\rho_e}{\rho_{dc}} \cdot g \cdot t$$

(0,25) Compte tenu de l'orientation du repère $v_z(t) = v(t)$.

(0,25) Et finalement : $v(t) = \frac{\rho_e}{\rho_{dc}} \cdot g \cdot t$

2.1.4. (0,25) Pour $t = t_s$ on a $v(t_s) = v_s = 15 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} = 1,5 \times 10^{-1} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$$t_s = \frac{v_s \cdot \rho_{dc}}{\rho_e \cdot g}$$

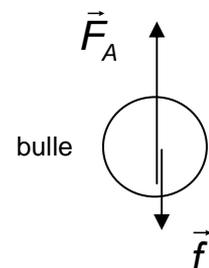
$$t_s = \frac{1,5 \times 10^{-1} \times 1,8}{1,0 \times 10^3 \times 10} = 1,5 \times 1,8 \times 10^{-5} = 2,7 \times 10^{-5} \text{ s} = 27 \mu\text{s} \approx 30 \mu\text{s}.$$

La durée nécessaire pour que la bulle atteigne la surface avec la vitesse v_s est bien d'environ trente microsecondes.

2.1.5. (0,25) Cette valeur ne correspond pas aux observations de la vie quotidienne car les bulles parviennent à la surface du liquide **beaucoup plus lentement**. Le modèle proposé n'est donc pas valide.

2.2. Étude du mouvement de la bulle en présence d'une force de frottement

2.2.1. (0,25) En négligeant le poids de la bulle devant les autres forces, la bulle est soumise à la poussée d'Archimède \vec{F}_A et à la force de frottement $\vec{f} = -k \cdot \vec{v}$.



La force de frottement étant opposée au vecteur vitesse elle est dirigée verticalement vers le bas.

Comme la bulle remonte en accélérant, la valeur de la poussée d'Archimède est supérieure à la valeur de la force de frottement.

2.2.2. Système : la bulle de dioxyde de carbone **Référentiel :** terrestre considéré galiléen.
Inventaire des forces : voir 2.2.1.

La deuxième loi de Newton donne maintenant: $\vec{F}_A + \vec{f} = m \cdot \vec{a}$

En projection selon l'axe (Oz) vertical orienté vers le haut, il vient :

$$F_{Az} + f_z = m \cdot a_z$$

(0,25)
$$\rho_e \cdot V_0 \cdot g - k \cdot v_z = \rho_{dc} \cdot V_0 \cdot \frac{dv_z}{dt}$$

En divisant chaque membre par le terme $\rho_{dc} \cdot V_0$ il vient :

$$\frac{\rho_e}{\rho_{dc}} \cdot g - \frac{k \cdot v_z}{\rho_{dc} \cdot V_0} = \frac{dv_z}{dt}$$

$$\frac{dv_z}{dt} + \frac{k \cdot v_z}{\rho_{dc} \cdot V_0} = \frac{\rho_e}{\rho_{dc}} \cdot g$$

Compte tenu de l'orientation du repère $v_z = v$ et $\frac{dv_z}{dt} = \frac{dv}{dt}$, on retrouve bien l'équation demandée :

(0,25)
$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{k \cdot v}{\rho_{dc} \cdot V_0} = \frac{\rho_e}{\rho_{dc}} \cdot g}$$

2.2.3. (0,25) Lorsque la bulle atteint la vitesse limite v_{lim} , la vitesse de la bulle est constante et $\frac{dv}{dt} = 0$

La relation précédente devient alors : $\frac{k \cdot v_{lim}}{\rho_{dc} \cdot V_0} = \frac{\rho_e}{\rho_{dc}} \cdot g$

(0,25) finalement :
$$\boxed{v_{lim} = \frac{\rho_e \cdot V_0}{k} \cdot g}$$

2.2.4. (0,25) L'application numérique donne v_{lim} voisin de $1 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$. Cette valeur est trop petite par rapport à la valeur donnée dans le texte $v_S = v_{lim} = 15 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$.

Le modèle proposé n'est pas valide.

2.3. Un autre paramètre à prendre en compte

2.3.1. (0,5) Le texte introductif indique : " **Il y a formation de bulles qui vont s'enrichir continûment en gaz au cours de leur remontée** ". La quantité de matière de gaz n'est pas constante, c'est la raison pour laquelle le volume de la bulle augmente si fortement lors de sa remontée.

2.3.2. Le coefficient k défini à la question 2.2. augmente avec le rayon de la bulle.

(0,25) Lorsque la bulle remonte son volume augmente, donc la valeur de la **poussée d'Archimède augmente** car $F_A = \rho_e \cdot V \cdot g$.

(0,25) Or le volume V est lié au rayon r de la bulle par la relation : $V = 4/3 \cdot \pi \cdot r^3$. Donc si V augmente alors **r augmente** aussi et par suite le coefficient **k augmente**. Ainsi au cours de la remontée **la valeur de la force de frottement augmente**.

3. L'éclatement d'une bulle en surface

3.1. (0,5) On ne peut pas obtenir d'images du film liquide en train de se rompre car la durée Δt de la rupture est de **quelques dizaines de microsecondes** alors que la durée entre deux images est $1 / 2000 = 5,000 \times 10^{-4} \text{ s} = 500 \mu\text{s}$, durée nettement supérieure à Δt .

3.2. (0,25) L'onde circulaire créée est **transversale** car la perturbation créée a une direction verticale perpendiculaire à la direction horizontale de propagation de l'onde circulaire.

Exercice 2 :

PARTIE A : La montée en ballon

A. On s'intéresse à l'ensemble {ballon + nacelle + sauteur} de masse m.

La poussée d'Archimède a une valeur égale au poids du volume d'air déplacé, soit V_b ce volume.

$$P = m \times g = 1,6 \times 10^3 \times 9,8 = \mathbf{1,6 \cdot 10^4 \text{ N}}$$

$$\Pi = \mu \times V_p \times g = 1,234 \times 4,0 \cdot 10^3 \times 9,8 = \mathbf{4,8 \cdot 10^4 \text{ N}} \quad \text{penser à convertir } \mu \text{ en } \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Si on considère que le système n'est soumis qu'à l'action de ces deux forces de même direction mais de sens opposés, alors on peut dire que le vecteur somme des forces est vertical et orienté vers le haut.

Le vecteur accélération est lui aussi vertical vers le haut, le ballon monte.

Partie B. Chute libre dans la haute atmosphère (stratosphère)

1. Un système est considéré en chute libre si il est soumis uniquement à la force poids. Dans la stratosphère, on constate que l'air est raréfié (masse volumique faible de valeur $1,8 \text{ g} \cdot \text{m}^{-3}$). On peut donc considérer que la poussée d'Archimède sera négligeable et que les forces de frottement de l'air seront également négligeables.

B.2.a. Dans un référentiel terrestre supposé Galiléen, on suppose que le sauteur n'est soumis qu'à son poids. En appliquant la deuxième loi de Newton, il vient $\vec{P} = m \times \vec{a}$ ou $\vec{a} = \vec{g}$

Sur un axe vertical Ox, orienté vers le bas et ayant comme origine O, position du centre d'inertie du sauteur à l'instant initial, on obtient :

$$a_x = g = \frac{dv_x}{dt}$$

En intégrant il vient $v_x = g \times t + \text{Cte}$ Or à $t=0$, la vitesse du sauteur est nulle

$$\text{On a alors } v_x = g \times t \quad (1) \quad \text{Soit } t = \frac{v_x}{g} = \frac{1067/3,6}{9,7} = 30,56 \text{ s} \quad \text{soit environ } \mathbf{31 \text{ s}}$$

B.2.b. En reprenant l'équation (1), on a $v_x = \frac{dx}{dt} = g \times t$

En intégrant on a : $x = \frac{1}{2} g \times t^2 + \text{Cte}$ Or à $t=0$, le sauteur est au point O donc $x = \frac{1}{2} g \times t^2$
x représente la distance parcourue par le sauteur, depuis sa position initiale en O.

$$\text{La hauteur de chute est égale à } x = \frac{1}{2} g \times \left(\frac{v_x}{g}\right)^2 = \frac{v_x^2}{2g} = \frac{(1067/3,6)^2}{2 \times 9,7} = 4528 \text{ m soit environ } \mathbf{4,5 \text{ km}}$$

L'altitude atteinte $h = h_0 - x = 40 - 4,5 = \mathbf{35 \text{ km environ}}$

B.3.c. Les résultats obtenus sont en accord avec ceux du document, l'hypothèse faite est donc justifiée. Le sauteur est en « chute libre ».

PARTIE C. Chute dans la basse atmosphère (troposphère)

$$\text{C.1. } F = k \cdot v^2 \quad \text{donc } k = \frac{F}{v^2} \quad F = m \cdot a \quad \text{donc } [F] = \text{M} \cdot \text{L} \cdot \text{T}^{-2}$$

$$\text{et } [v^2] = [v] \cdot [v] = \text{L}^2 \cdot \text{T}^{-2}$$

$$\text{soit } [k] = \frac{\text{M} \cdot \text{L} \cdot \text{T}^{-2}}{\text{L}^2 \cdot \text{T}^{-2}} \quad [k] = \text{M} \cdot \text{L}^{-1} \quad k \text{ s'exprime en } \mathbf{\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}}$$

C.2. Considérons le système {sauteur + équipement} dans un référentiel terrestre supposé galiléen. Les forces qui s'exercent sur ce système sont le poids \vec{P} et les forces de frottement \vec{f} (force verticale dirigée vers le haut). On peut négliger la poussée d'Archimède, compte tenu du faible volume d'air déplacé.

En appliquant la deuxième loi de Newton, on obtient $\vec{P} + \vec{f} = m \times \vec{a}$

Projetons sur un axe vertical orienté vers le bas ayant pour origine le point correspondant à l'altitude $h = 10 \text{ km}$:

$$m \cdot g - k \cdot v^2 = m \cdot a = m \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$\text{Soit l'équation différentielle : } \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} \cdot v^2 = g$$

C.3.a. L'équation précédente peut s'écrire $a = \left(g - \frac{k}{m} \cdot v^2\right)$,

$$\text{soit à la date } t_n : a_n = \left(g - \frac{k}{m} \times v_n^2\right)$$

$$\text{Or } a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} \quad \text{On peut considérer que l'accélération } a \text{ varie peut durant la durée } \Delta t,$$

soit $a = a_n$

Il vient : $a_n = (g - \frac{k}{m} \times v_n^2) = \frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t}$

Soit $v_{n+1} = v_n + (g - \frac{k}{m} \times v_n^2) \times \Delta t$

$v_{n+1} = v_n + A - B \times v_n^2$

Avec $A = g \times \Delta t$ s'exprimant en $m.s^{-1}$ ($9,8 \times 0,5 = 4,9$)

$B = \frac{k}{m} \times \Delta t$ en $s.m^{-1}$ ($0,78 \times 0,5 / 200 = 1,95.10^{-3}$)

Les valeurs trouvées sont concordantes avec celle de l'énoncé, donc l'hypothèse de négliger la poussée d'Archimède est validée.

C.3.b.

Le temps caractéristique est de l'ordre de 2 s (intersection tangente à l'origine avec asymptote horizontale).

v_{lim} vaut environ $50 m.s^{-1}$ (voir schéma)

$v_{lim} = 50 \times 3,6 = 1,8.10^2 km.h^{-1}$

La vitesse limite est égale à la vitesse atteinte à l'ouverture du parachute est de $180 km.h^{-1}$. Le calcul est donc correct. Michel Fournier peut enfin ouvrir son parachute et se reposer.

La condition sur Δt est qu'il doit être petit devant τ . Ici, $0,5 s < 2s$; la méthode est applicable.

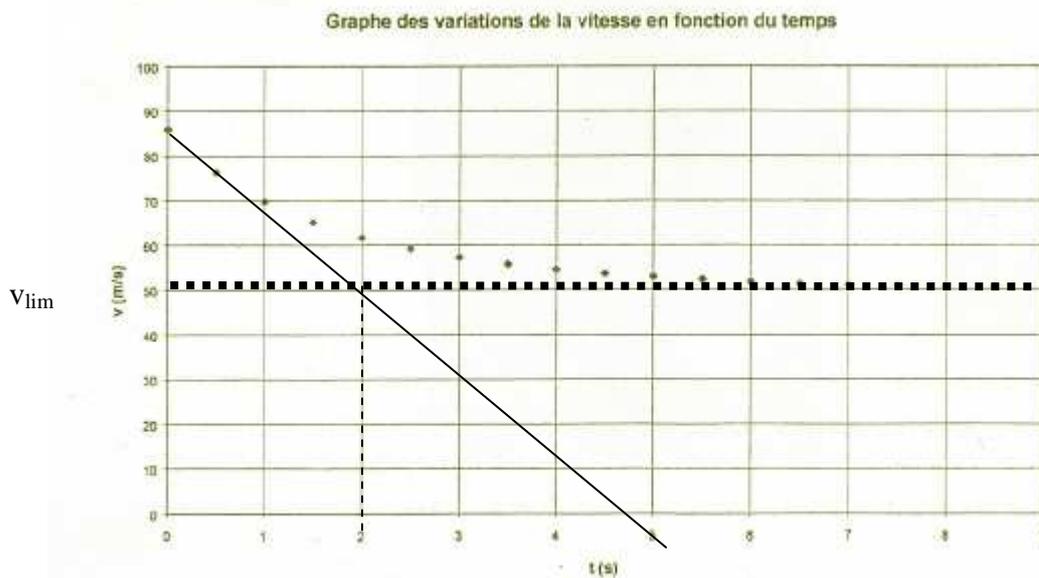


Figure 1

remarque: on peut calculer v_{lim} à partir de l'équation différentielle: $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} \times v^2 = g$

Pour $v = v_{lim}$, alors $a = 0$ donc $0 + \frac{k}{m} \times v_{lim}^2 = g$ $v_{lim} = \sqrt{\frac{g.m}{k}} = \sqrt{\frac{9,8 \times 200}{0,78}} = 50 m.s^{-1}$

Exercice 3 :

Première partie : Étude de la solution mère

1.(0,25) $n_0 = C_0 \cdot V$

$n_0 = 3,0 \times 10^{-5} \times 0,100$

$n_0 = 3,0 \times 10^{-6}$ mol de bleu de bromophénol dans $V = 100$ mL de solution S_0

2.1. (0,25) D'après Bronsted, un acide est une espèce chimique capable de céder un proton $H^+_{(aq)}$.

2.2. (0,5) Couples acide-base mis en jeu dans la réaction $HIn_{(aq)} + H_2O_{(l)} = In^-_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$

couple 1 : $HIn_{(aq)} / In^-_{(aq)}$

couple 2: $H_3O^+_{(aq)} / H_2O_{(l)}$

3. Étude de la réaction de HIn sur l'eau

3.1. (0,25)		$HIn_{(aq)}$	+	$H_2O_{(l)}$	=	$In^-_{(aq)}$	+	$H_3O^+_{(aq)}$
	Avancement	Quantités de matière						
État initial	$x = 0$	n_0		Excès		0		0
État intermédiaire	x	$n_0 - x$		Excès		x		x

État final si réaction totale	$x = x_{\max}$	$n_0 - x_{\max} = 0$	Excès	x_{\max}	x_{\max}
État final observé	$x = x_f$	$n_0 - x_f$	Excès	x_f	x_f

3.2. (0,25) Le réactif limitant est HIn, l'eau étant introduite en excès.

HIn est totalement consommé alors $n_0 - x_{\max} = 0$

$$x_{\max} = n_0 = 3,0 \times 10^{-6} \text{ mol}$$

3.3. D'après le tableau d'avancement $n_{H_3O^+} = x_f$ donc $[H_3O^+] = \frac{x_f}{V}$. D'autre part $[H_3O^+] = 10^{-\text{pH}}$.

(0,25) Ainsi $\frac{x_f}{V} = 10^{-\text{pH}}$, finalement $x_f = 10^{-\text{pH}} \cdot V$

$$(0,25) \quad x_f = 10^{-4,7} \times 0,100$$

$$x_f = 2,0 \times 10^{-6} \text{ mol}$$

$$3.4. (0,25) \tau = \frac{x_f}{x_{\max}}$$

$$(0,25) \tau = \frac{2,0 \times 10^{-6}}{3,0 \times 10^{-6}} = 0,67 = 67\%$$

$\tau < 100\%$ donc la réaction n'est pas totale, elle est **limitée**.

4. Relation de conservation de la matière

4.1. (0,25) D'après le tableau $n_{HIn} = n_0 - x$; $n_{In^-} = x$, ainsi $n_{HIn} + n_{In^-} = n_0 - x + x = n_0$.

$$4.2. (0,25) n_{HIn} + n_{In^-} = n_0$$

en divisant par V on a $\frac{n_{HIn}}{V} + \frac{n_{In^-}}{V} = \frac{n_0}{V}$

donc $[HIn_{(aq)}] + [In^-_{(aq)}] = C_0$

Deuxième partie : Étude de deux solutions

1. (0,25) La solution S₁ est jaune, la forme acide HIn prédomine en solution.

La solution S₂ est bleue, la base conjuguée In⁻ prédomine en solution.

2. (0,25) La proportion d'acide et de base conjuguée dépend du pH de la solution.

3. (0,25) $[HIn_{(aq)}] + [In^-_{(aq)}] = C_0$ si $[HIn_{(aq)}] \ll [In^-_{(aq)}]$ alors $[In^-_{(aq)}] = C_0$

$$[In^-_{(aq)}] = 3,0 \times 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$$

Troisième partie : Étude spectrophotométrique

1. Calcul des concentrations des espèces In⁻ et HIn

1.1. (0,25) Seule la forme basique In⁻ absorbe de la lumière, à la longueur d'onde choisie.

De plus l'absorbance est liée à la concentration effective [X] de l'espèce absorbante par $A = k \cdot [X]$.

$$\text{Alors } A = k \cdot [In^-].$$

1.2. (0,25) Dans la deuxième partie, au (3.), on a émis l'hypothèse que pour la solution S₂ de pH = 12,0 on avait $[In^-] \gg [HIn]$.

Alors $[In^-_{(aq)}] = C_0$, donc $A_{\max} = k \cdot C_0$

$$k = \frac{A_{\max}}{C_0}$$

$$(0,25) k = \frac{1,66}{3,0 \times 10^{-5}} = 5,5 \times 10^4; A \text{ est une grandeur}$$

$$1.3. (0,25) A = k \cdot [In^-] \text{ avec } k = \frac{A_{\max}}{C_0}$$

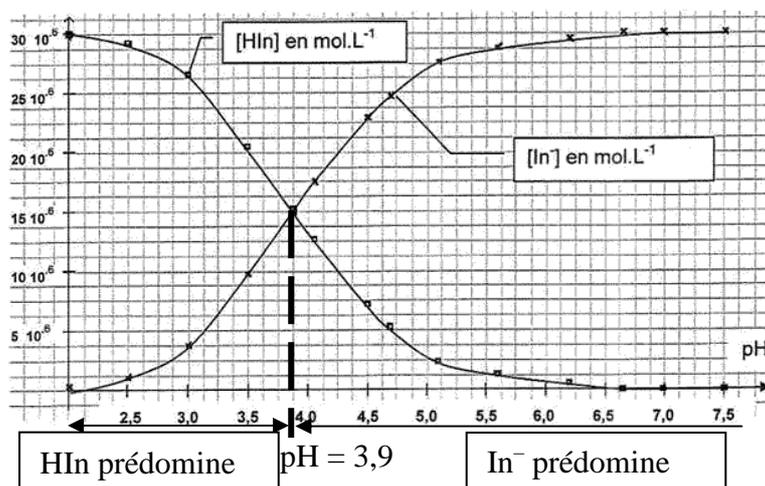
$$A = \frac{A_{\max}}{C_0} \cdot [In^-] \text{ donc } [In^-] = \frac{A}{A_{\max}} \cdot C_0$$

$$[In^-] = \frac{0,83}{1,66} \times 3,0 \times 10^{-5} = 1,5 \times 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$$

D'autre part $[HIn_{(aq)}] + [In^-_{(aq)}] = C_0$

$$[HIn_{(aq)}] = C_0 - [In^-_{(aq)}]$$

Concentrations (mol.L⁻¹)



$$[\text{HIn}_{(\text{aq})}] = C_0 - \frac{A}{A_{\text{max}}} \cdot C_0$$

$$(0,25) \quad [\text{HIn}_{(\text{aq})}] = C_0 \left(1 - \frac{A}{A_{\text{max}}}\right)$$

$$[\text{HIn}_{(\text{aq})}] = 3,0 \times 10^{-5} \left(1 - \frac{0,83}{1,66}\right) = 1,5 \times 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$$

2.1. Voir figure ci-contre.

(0,25)

$$2.2. (0,25) \text{pH} = \text{pKa} + \log \frac{[\text{In}^-]}{[\text{HIn}]}$$

2.3.

$$(0,25) \text{Pour } \frac{[\text{In}^-]}{[\text{HIn}]} = 1, \text{ on a } \text{pH} = \text{pKa}.$$

(0,25) On mesure graphiquement

pour $[\text{HIn}] = [\text{In}^-]$, alors $\text{pH} = \text{pKa} = 3,9$

2.4. Hypothèse : Pour la solution S_2 , la concentration effective $[\text{HIn}]$ est négligeable.

Le pH de la solution S_2 vaut 12,0.

$$\text{pH} = \text{pKa} + \log \frac{[\text{In}^-]}{[\text{HIn}]}$$

$$\text{pH} - \text{pKa} = \log \frac{[\text{In}^-]}{[\text{HIn}]}$$

$$(0,25) 10^{\text{pH} - \text{pKa}} = \frac{[\text{In}^-]}{[\text{HIn}]}$$

$$[\text{In}^-] = [\text{HIn}] \cdot 10^{\text{pH} - \text{pKa}}$$

$$[\text{In}^-] = [\text{HIn}] \cdot 10^{12 - 3,9}$$

$$[\text{In}^-] = [\text{HIn}] \cdot 10^{8,1}$$

(0,25) on vérifie bien que $[\text{In}^-] \gg [\text{HIn}]$